学校编码：10384 密级______
学号：X2006170017

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

求解 Toeplitz 系统的循环和反循环分裂算法

Circulation and Skew-circulation Splitting Algorithm for Toeplitz Systems

曹蓉

指导教师姓名： 卢琳璋 教授
专 业 名 称： 应用数学
论文提交日期： 2010 年 月
论文答辩日期： 2010 年 月

二0一0年六月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

目 录

Table of Contents

摘 要

Toeplitz 矩阵及与之密切相关的 Vondermonde 型矩阵、Loewner 型矩阵、Hankel 矩阵和中心对称矩阵等，是应用最广泛的特殊类矩阵之一。由于这类矩阵在许多科技领域中有着广泛的应用，所以对该类矩阵的研究甚为活跃。

Toeplitz 一词是在二十世纪初 Otto Toeplitz 在研究关于 Laurent 数列的双线型结构时提出的。Toeplitz 方程组在数学、科学计算以及工程方面都有广泛的应用。如图像处理中的图像储存问题、代数微分方程、控制理论等方面。

Toeplitz 线性方程组的求解有许多,包括古典迭代法：Jacobi 迭代、Gauss-Seidel 迭代、超松弛迭代(SOR),以及 Zohar 算法、Akaike 算法和 Bareiss 算法等。本文主要给出了 Toeplitz 系统单参数循环和反循环的迭代算法和双参数循环和反循环的迭代算法，并且通过数值实验比较了两者的收敛速度。本文还介绍了块 Toeplitz-Toeplitz 块（BTTB）矩阵方程组分裂算法，类似于 Toeplitz 矩阵，将 BTTB 矩阵分裂为块循环-循环块（$\mathbf{C}_\mathbf{C}$）、块循环-反循环块（$\mathbf{C}_\mathbf{S}$）、块反循环-循环块（$\mathbf{S}_\mathbf{C}$）和块反循环-反循环块（$\mathbf{S}_\mathbf{S}$），并通过四步迭代法和二层迭代法给出 BTTB 线性系统的求解，随后给出四步迭代的收敛性证明。我们在算法中巧妙地利用了块 Toeplitz-Toeplitz 块矩阵及它的分裂特点（只与第一行、列元素有关，特别情形下的正定矩阵只与第一行元素有关)，大大的节约了计算代价。数值实验中还与 Gauss-Seidel 迭代法、超松弛迭代（SOR）法作比较，显然四步迭代法和二层迭代法要优于这两种迭代方法。

本文的内容安排如下：

第一章给出问题的应用背景及研究现状；

第二章给出 Toeplitz 矩阵的定义及基本结论；

第三章介绍 Toeplitz 系统循环和反循环(CSCS)分裂算法；

第四章介绍块 Toeplitz-Toeplitz 块矩阵的 CSCS 迭代；

关键词 Toeplitz 循环 反循环 双参数 BTTB

Abstract

Toeplitz matrices and the closely related matrices such as Vondermonde matrix, Loewner matrix, Hankel matrix and Centro-Symmetric matrix etc. are the most widely used matrices of the special structure. As such matrix in many fields of science and technology has a wide range of applications, so research for it is active .

The word "Toeplitz" was proposed by Otto Toeplitz in the beginning of the twentieth century when studying on the Laurent series of two-type structure. Toeplitz linear system of equations in mathematics, scientific computing and engineering have a wide range of applications. For example, image storage problems in image processing, algebraic differential equations, control theory and so on.

Solving Toeplitz linear system of equations has many algorithms, such as Zohar algorithm, Akaike algorithm and Bareiss algorithm,and so on. Then there are basic iterative methods to solve Toeplitz linear system.Such as Jacobi's method,Gauss-Seidel method and Successive overrelaxation.This paper mainly discusses single-parameter circulation and skew-circulation splitting algorithm and two-parameters' for Toeplitz systems.And this paper compares the speed of two kinds of methods.Then this paper introduces splitting algorithm for Block-Toeplitz-Toeplitz-Block(BTTB) system.Similar to the Toeplitz matrix,the BTTB matrix A is spiltted a block-circulant-circulant-block matrix(C_C),a block-circulant-skew-circulant-block matri(C_S),a block-skew-circulant-circulant-block matrix(S_C) and a block-skew-circulant-skew-circulant-block matrix(S_S).This paper discusses four iteration method and two-layered iteration method for BTTB systems and the convergence of four iteration method.We subtly use the characteristic of BTTB(It is only with the first row, column elements ,especially with the first line for positive definite matrix), so it saves the computation. At last this paper compares Gauss-Seidel method and SOR method with two kinds of methods.Obviously,two kinds of methods are superior to both Gauss-Seidel method and SOR method.

The contents of this paper is as follows.

The first chapter gives the background of the problem and examine the application of the status quo;

The second chapter gives the definition of Toeplitz matrix and the basic

conclusion;

The third chapter is devoted to circulation and skew-circulation split algorithm for Toeplitz systems;

The forth chapter introduce block Toeplitz-Toeplitz block matrix of the multi-parameter iterative CSCS.

Keywords; Toeplitz; circulant; skew-circulant; two-parameter;BTTB

第一章 引 言

Toeplitz矩阵在数学和工程问题中有着广泛的应用。我们熟悉的在信号处理中，常常通过求解Toeplitz矩阵方程组获得的模型参数包括：递推数字滤波器的系数，一维和二维平稳自回归（AR）模型的 AR参数等。又如，信号和图像的恢复也可归结为Toeplitz矩阵方程组的求解问题[26]。其他的应用例子还有：偏微分方程和卷积型积分方程的求解、Pdae 逼近和控制理论中的最小实现问题[5]以及自动控制、数字信号处理、系统辨识、最小二乘估计结构分析、网络分析、大地测量、数据分析、最优化问题等。

往往这些各种各样的科学与工程问题最终都归结为一个系数矩阵为Toeplitz矩阵的线性方程组的求解问题。即

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b},$$

$$\text{其中 } \mathbf{A}\in C^{n\times n}\text{，且 } \mathbf{x},\mathbf{b}\in C^{n}\text{，} \qquad (1)$$

的求解问题.

对Toeplitz系统的求解早前主要集中在直接求法，最基本的直接求法是 Gauss 消去法。显然 Gauss 消去法是目前求解中小规模线性方程组（即阶数不要太高，例如不要超过 1000）最常用的方法，对于一个 $n\times n$ Toeplitz矩阵只由 $2n-1$ 个元素决定而不是 n^2 个元素决定，因此我们期望Toeplitz系统的求解要比 $O(n^3)$ 的运算量要少。现在已经有许多Toeplitz解法，这些解法能够减少到 $O(n^2)$ 的运算量，例如[7，10]。大概在 1980 年，就有了运算量为 $O(n\log^2 n)$ 快速直接的Toeplitz解法。

近年来研究使用预处理共轭梯度迭代法来解Toeplitz系统引起了大家的关注。其中一个最重要的结论是解大型Toeplitz系统可以减少运算量，在一定条件下，若能找到合适的预处理，快速直接Toeplitz解法的 $O(n\log^2 n)$ 运算量可以减少到 $O(n\log n)$。除了能够减少运算量，对于大型Toeplitz矩阵，快速直接Toeplitz解法显然不稳定，特别是对一些不

定的或非 Hermitian Toeplitz 矩阵。因此，迭代方法通常用来解决这些 Toeplitz 系统。

将方程组（1）等价变形为

$$\mathbf{x}=\mathbf{M}\mathbf{x}+\mathbf{f}, \tag{2}$$

并建立迭代格式

$$\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{M}\mathbf{x}^{(k)}+\mathbf{f} \qquad (k=0,1,2,\cdots), \tag{3}$$

其中 $\mathbf{M}$ 是 n 阶矩阵，称为迭代矩阵，$\mathbf{f}$ 是与 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{b}$ 有关的 n 维列向量，而 $\mathbf{x}^{(0)}$ 是任意给定的 n 维列向量，称为初始向量。如果向量序列 $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{x}^{(k)}=\mathbf{x}^{*}$，则 $\mathbf{x}^{*}$ 就是方程组 $\mathbf{x}=\mathbf{M}\mathbf{x}+\mathbf{f}$ 的唯一解，从而也是方程组（1）的唯一解。

线性方程组的迭代解法需要有效地分裂系数矩阵 $\mathbf{A}$。早期的古典迭代法[11]Jacobi 迭代将系数矩阵 $\mathbf{A}$ 分裂为 $\mathbf{A}=\mathbf{D}-(\mathbf{D}-\mathbf{A})$，其中对角矩阵 $\mathbf{D}=diag(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$ 可逆，方程组等价于 $\mathbf{x}=\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D}-\mathbf{A})$ $\mathbf{x}+\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$，令 $\mathbf{M}_{J}=\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D}-\mathbf{A})$，$\mathbf{f}=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$.

另外 Gauss-Seidel 迭代是在方程组（1）的等价形式（2）中，分裂 $\mathbf{M}=\mathbf{L}+\mathbf{U}$，其中 $\mathbf{L}$ 为严格下三角矩阵，$\mathbf{U}$ 为上三角矩阵，于是（2）等价于 $\mathbf{x}=(\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}+(\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{f}$，令 $\mathbf{M}_{GS}=(\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$，$\mathbf{f}_{GS}=(\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{f}$。还有广义共轭梯度法[11]和广义 Lanczos 法[12], 以及 HSS 类算法, 将系数矩阵 $\mathbf{A}$ 分裂为 Hermitian 和反 Hermitian 矩阵等等。显然若系数矩阵具有某种特殊形式，则为了尽可能地减少计算量与储存量，需采用其他专门的方法来求解。

Toeplitz 矩阵是应用最广泛的特殊矩阵之一，也是近年来计算数学研究较为热门的一类特殊矩阵，国内外大量的学者给出了一些优越的算法。首先 Zohar[27]于 1974 年利用加边线性方程组的解法来求解 Toeplitz 线性方程组（Zohar 算法），该算法需要 $4n^2-2n-2$ 次乘除运算和 $4n^2-7n+3$ 次加减运, 然而 Levinson 和 Durbin 分别于 1949 年和 1960 年推导出了对称 Toeplitz 矩阵和 Hermite 型 Toeplitz 矩阵类似的算法，只是在选取初值上有差别。Akaike[28]于 1973 年结合求逆矩阵的 Akaike

算法并做了进一步改进，得到了求解分块Toeplitz矩阵线性方程组的Akaike算法，该算法需$4n^2-4$次 p 阶方阵乘法运算，$4n^2-6n+2$次 p 阶方阵加法运算和 n 次 p 阶方阵求逆运算。还有其它的一些方法来解Toeplitz线性方程组。现在来简单的介绍一下在文章[29]中，Bareiss变换法也是一种很好的方法，该方法需要$\frac{7}{2}n^2-\frac{7}{2}n+1$次乘除法运算，$\frac{7}{2}n^2-\frac{13}{2}n+3$次加减法运算。但是，Bareiss变换法要求Toeplitz矩阵的各阶顺序主子式均非奇异并且当 T 是对称Toeplitz矩阵或Hermite型Toeplitz矩阵时，计算过程还可以简化。在文章[11]中，提出Gohberg−Kailath−Koltracht算法，要求 T 的各阶顺序主子式均非奇异。该方法需要$(2l+1)n^2-l+1$次乘除法运算，$(2l+1)n^2-(2l+2)n+1$次加减法运算。Kumar[30]将Toeplitz矩阵先镶嵌成一个大的循环矩阵，并且求该矩阵的逆矩阵；然后利用循环矩阵逆矩阵的第一行和第一列求原矩阵的逆矩阵的第一行和第一列；最后求解原Toeplitz线性方程组，其总计算量为$O(n\log_2^2 n)$。

本文首先介绍了Toeplitz矩阵的单参数的循环与反循环分裂算法，利用循环矩阵与反循环矩阵的快速 Fourier 变换，很容易的求得Toeplitz方程组的解。然后，我们给出Toeplitz矩阵新的双参数循环与反循环算子分裂迭代格式和程序代码，并证明了此格式的收敛性。随后，我们又考虑了块Toeplitz−Toeplitz块矩阵线性方程中将 BTTB 矩阵分裂为块循环-循环块（$\mathbf{C_C}$）、块循环-反循环块（$\mathbf{C_S}$）、块反循环-循环块（$\mathbf{S_C}$）和块反循环-反循环块（$\mathbf{S_S}$）的分裂法，并分别用四步迭代和二层迭代的方法求方程组的解，还对四步迭代法（定理 4.7）讨论了其收敛性。通过从数值实验来看四步迭代法优于二层迭代法。

第二章 Toeplitz 矩阵及基本结论

§2.1 Toeplitz矩阵的定义及基本结论

若 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 满足

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & a_{-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ a_{-n+2} & \cdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_{-n+1} & a_{-n+2} & \cdots & a_{-1} & a_0 \end{bmatrix} \text{ 其中 } a_{ij}=a_{j-i}, \qquad (4)$$

这样的矩阵称为 Toeplitz 矩阵，易见 Toeplitz 矩阵的主对角线上各元素彼此相等，且平行于主对角线的各对角线上的元素也彼此相等。如果其元素满足对称关系，即 $a_{-j}=a_j (j=1,2,\cdots,n-1)$，则称之为对称 Toeplitz 矩阵；如果其元素满足 $a_{-j}=\overline{a}_j (j=1,2,\cdots,n-1)$，则称之为 Hermite 型 Toeplitz 矩阵。Toeplitz 矩阵这个名字的由来最早起源于 20 世纪初 Otto Toeplitz［9］的一书中关于 Laurent 系列的双线性形式，具体详情看[6]。

容易验证，n 阶 Toeplitz 矩阵 $\mathbf{A}$ 满足

$\mathbf{A}-\mathbf{Z}\mathbf{A}\mathbf{Z}^T=(a_0,a_{-1},\cdots,a_{-n+1})^T\mathbf{e}_1^T+\mathbf{e}_1(0,a_1,\cdots,a_{n-1})$，其中 $\mathbf{Z}$ 是 n 阶移位矩阵：

$$Z=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

另外，对 n 阶 Toeplitz 矩阵，容易验证有以下两个等式成立：

$\mathbf{Z}\mathbf{A}-\mathbf{A}\mathbf{Z}=(0,a_{n-1},\cdots,a_1)^T\mathbf{e}_n^T-\mathbf{e}_1(a_1,\cdots,a_{n-1},0)$，

$\mathbf{Z}^T\mathbf{A}-\mathbf{A}\mathbf{Z}^T=(a_{-1},\cdots,a_{-n+1},0)^T\mathbf{e}_1^T-\mathbf{e}_n(0,a_{-n+1},\cdots,a_{-1})$.

定义 2.1 若 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 满足

$$\mathbf{A}-\mathbf{Z}\mathbf{A}\mathbf{Z}^T=\sum_{i=1}^{l}\mathbf{p}^{(i)}\mathbf{q}^{(i)T}$$

其中 l 是正整数，$\mathbf{p}^{(i)},\mathbf{q}^{(i)}(i=1,2,\cdots,l)$ 均为 n 维列向量，则称 $\mathbf{A}$ 为 Toeplitz 型矩阵。

§2.2 循环矩阵与反循环矩阵的定义及基本结论

定义 2.2 具有如下形式的 n 阶方阵 $\mathbf{C}$ 称为循环矩阵

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

显然，$\mathbf{C}$ 由其首行元素惟一确定，简记为 $\mathbf{C}=circ(a_0,a_1,\cdots a_{n-1})$。特别地，$n$ 阶循环矩阵

$$\mathbf{K}=circ(0,1,0,\cdots,0)=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \\ 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

称为单位循环矩阵。

单位循环矩阵具有如下结论[24]。

引理 2.1 设 $\mathbf{K}$ 是 n 阶单位循环矩阵，$\mathbf{C}$ 是 n 阶循环矩阵，则有如下结论：

1）$\mathbf{K}$ 是正交矩阵，即 $\mathbf{K}^{-1}=\mathbf{K}^T$；

2）$\mathbf{K}^j=circ(\underbrace{0,\cdots,0}_{j},1,0,\cdots,0), j=1,2,\cdots,n-1$，$\mathbf{K}^n=\mathbf{I}_n$（规定 $\mathbf{K}^0=\mathbf{I}_n$）；

3）取 n 阶 Fourier 变换矩阵

$$\mathbf{F}=\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}$$

其中 $\omega=e^{-\frac{2\pi i}{n}}(i=\sqrt{-1})$ 是 n 次单位根。易知 $\mathbf{F}$ 是酉矩阵，即 $\mathbf{F}^{-1}=\mathbf{F}^H$，且有

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{F}=diag(1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1})$$

可见 $\omega^j(j=0,1,\cdots,n-1)$ 是 $\mathbf{K}$ 的 n 个特征值，而 $\mathbf{F}$ 的各列是对应的单位正

交特征向量；

4） $\mathbf{C}=\sum_{j=0}^{n-1}a_j\mathbf{K}^j$；

5） $\mathbf{CK}=\mathbf{KC}$。

定义 2.3 形如

$$\mathbf{C}(r)=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ ra_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_1 & ra_2 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

的 n 阶方阵 r-循环矩阵。特别地，当 $r=1$ 时，即得循环矩阵；当 $r=-1$ 时，称之为**反循环矩阵（或斜循环矩阵）**。

定理 2.1[24] $\mathbf{C}$ 为 n 阶循环矩阵的充要条件是存在数 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ 使

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{CF}=diag(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})$$

证明 必要性 若 $\mathbf{C}$ 为 n 阶循环矩阵，则由引理 2.1

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{CF}=\sum_{j=0}^{n-1}a_j\mathbf{F}^{-1}\mathbf{K}^j\mathbf{F}=\sum_{j=0}^{n-1}a_j diag(1,\omega^j,\omega^{2j},\cdots,\omega^{(n-1)j})$$

$$=diag(\sum_{j=0}^{n-1}a_j,\sum_{j=0}^{n-1}a_j\omega^j,\sum_{j=0}^{n-1}a_j\omega^{2j},\cdots,\sum_{j=0}^{n-1}a_j\omega^{(n-1)j})$$

令 $\lambda_k=\sum_{j=0}^{n-1}a_j\omega^{kj}(k=0,1,\cdots,n-1)$，即得所需结论。

充分性 若矩阵 $\mathbf{C}$ 满足 $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{CF}=diag(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})$，利用 $\omega^n=1$ 经直接计算知 $\mathbf{C}=\mathbf{F}diag(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})\mathbf{F}^{-1}$ 是循环矩阵。

由上面定理得到循环矩阵的 n 个特征值为

$$\lambda_k=\sum_{j=0}^{n-1}a_j\omega^{kj},\ k=0,1,\cdots,n-1$$

且 n 阶 Fourier 矩阵 $\mathbf{F}$ 的各列构成相应的单位正交特征向量系。

定理 2.2[24]设 $\mathbf{C}(r)$ 是 n 阶 r-循环矩阵，且 $r\neq 0$，取